

下記設問 [1～7] から最低1問以上選んで回答せよ。

[1] 難度:易 (KG方程式)

Klein-Gordon 方程式 $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$ の解の一例として

$$\psi(x) = Ae^{-ipx} + Be^{ipx} \quad (p^2 = m^2)$$

とした(但し $A, B \in \mathbb{C}$ は0でない定数)。

(1) $\psi(x)$ が Klein-Gordon 方程式を満たすことを確かめよ。

(2) $\rho \equiv \psi^* \psi$ とすると $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$ となることを確かめよ。

(3) $\rho \equiv i[\psi^*(\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^*)\psi]$ であれば $\frac{d\rho}{dt} = 0$ となることを確かめよ。

[2] 難度:易～中 (複素スカラー場の複素位相U(1)変換対称性に対応する Noether current)

Klein-Gordon 方程式 $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$ の解について

$$Q \equiv \int d^3x i[\psi^*(\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^*)\psi]$$

と定義すると, $\frac{dQ}{dt} = 0$ を(ネーターの定理は使わず上式 Q から dQ/dt を直接計算して)確かめよう。

但し ψ は, 無限遠で $\psi \rightarrow 0$ と仮定する。

[hint] 任意の実場 φ, ψ に対して, 領域 V 及びその境界 ∂V 上の積分について

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds \quad \text{Green の定理}$$

[3] 難度:中 (複素スカラー場のHamiltonian)

複素スカラー場 ψ に対して, Lagrangian density, 共役運動量 π , 及び, Hamiltonian density は,

$$\mathcal{L} \equiv \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t \psi]} = \partial_t \psi^\dagger \quad \pi^\dagger = \partial_t \psi$$

$$\mathcal{H} \equiv \pi \partial_t \psi + (\partial_t \psi^\dagger) \pi^\dagger - \mathcal{L}$$

と与えられる。

以下の問に答えよ。なお, $\psi, \psi^\dagger, \pi, \pi^\dagger, a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は, 演算子なので積の順番を入れ替えてはいけないことに注意。

(1) $\mathcal{H} = \partial_t \psi^\dagger \partial_t \psi + \partial_i \psi^\dagger \partial_i \psi + m^2 \psi^\dagger \psi$ を示せ。

(2) $\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} [a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}]$ 但し $p = (E, p_i), p^2 = E^2 - p_i^2 = m^2$

とする。

$$H \equiv \int d^3x (\partial_t \psi^\dagger \partial_t \psi + \partial_i \psi^\dagger \partial_i \psi + m^2 \psi^\dagger \psi)$$

から

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2} [a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})] + \text{const}$$

を導け。

(Hint)

$$\partial_t \psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} iE [-a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}] \quad \partial_i \psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} ip_i [a(\vec{p})e^{-ipx} - b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}]$$

$$\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{\pm i\vec{p}' \cdot \vec{x}} = \delta(\vec{p} \pm \vec{p}')$$

[4] 難度:中～難 (複素スカラー場のMomentum)

複素スカラー場 ψ に対して, Lagrangian density, 共役運動量 π は,

$$\mathcal{L} \equiv \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t \psi]} = \partial_t \psi^\dagger \quad \pi^\dagger = \partial_t \psi$$

と与えられる。この Lagrangian density の座標の平行移動に対する対称性から Noether current として Energy-momentum tensor $T^{\mu\nu}$ が,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

のように与えられる。

以下の問に答えよ。なお, $\psi, \psi^\dagger, \pi, \pi^\dagger, a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は, 演算子なので積の順番を入れ替えてはいけないことに注意。

(1) T^{00} は, Energy density を表しており,

$$T^{00} = \partial_t \psi^\dagger \partial_t \psi + \partial_i \psi^\dagger \partial_i \psi + m^2 \psi^\dagger \psi \quad (\equiv \mathcal{H})$$

を示せ。

(2) T^{0i} は, Momentum density を表しており,

$$T^{0i} = -[\pi \partial_i \psi + (\partial_i \psi^\dagger) \pi^\dagger]$$

を示せ。

(3) $P_i \equiv \int d^3 x T^{0i} = - \int d^3 x [\pi \partial_i \psi + (\partial_i \psi^\dagger) \pi^\dagger]$ から

$$P_i = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} p_i [a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})] + \text{const}$$

を導け。

(4) $[P, a^\dagger(\vec{p})] = \vec{p} a^\dagger(\vec{p}) \quad [P, b^\dagger(\vec{p})] = \vec{p} b^\dagger(\vec{p})$

を示し, これらを用いて以下のように複素スカラー場の1粒子, 1反粒子状態がそれぞれ運動量演算子 P の固有状態となっていることを導け。

$$P a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \vec{p} a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad P b^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \vec{p} b^\dagger(\vec{p})|0\rangle$$

(Hint)

$$\partial_t \psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} iE [-a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}] \quad \partial_i \psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} ip_i [a(\vec{p})e^{-ipx} - b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}]$$

$$\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{\pm i\vec{p}' \cdot \vec{x}} = \delta(\vec{p} \pm \vec{p}')$$

[5] 難度:中～難 (Dirac spinor の Lorentz 変換性)

z (3軸)方向への速度 β の Lorentz boost (※)

※ 観測者の系に対して z (3軸)方向に速度 β で動いている系における4元ベクトル x を観測者の系で見たときの4元ベクトル x' への変換

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & & \beta\gamma \\ & 1 & \\ \beta\gamma & & \gamma \end{pmatrix} \quad \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$$

に対して,

$$S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_3 \frac{\gamma\beta}{\gamma+1} \\ \sigma_3 \frac{\gamma\beta}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$S^{-1} \gamma^{\mu} S = a^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$$

$$S^{-1} = \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0$$

が満たされていることを示せ。但し $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ (Dirac 表示) を用いる。

[Hint] $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$

すなわち $\sigma_i \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_i = 2\delta_{i3}$, $\sigma_3 \sigma_i \sigma_3 = 2\delta_{i3} \sigma_3 - \sigma_i$

[6] 難度:中 ($\bar{f} + \gamma^* \rightarrow \bar{f}$, $f + \bar{f} \rightarrow \gamma^*$)

静止した反fermion(質量 m)が光子を吸収する場合を考える。

(1) 反fermionの運動量が $0 \rightarrow p\hat{z}$ ($p \neq 0$) と変化し, スピンの z 軸成分は, $+1/2$ から $-1/2$ へと -1 変化した。

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 = 0 & \rightarrow \vec{p}_2 = p\hat{z} \\ \chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow \chi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この時の相互作用の振幅のスピン部分はFeynman則を使うと

$$\bar{v}_1(\vec{0}) \gamma^{\mu} v_2(p\hat{z}) \varepsilon_{\mu}$$

$$\text{但し } v_{1(2)} \text{ は始(終)状態の反fermion spinor } v_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{E_i + m} \chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{\mu} \text{ は光子の偏極ベクトル } \varepsilon^{\mu} = (0, \vec{\varepsilon}) \quad [\varepsilon_{\mu} = (0, -\vec{\varepsilon})]$$

と書ける。振幅が0にならないためには, 光子のスピンは, $J_z = -1$ [すなわち $\varepsilon^{\mu} = (0, 1, -i, 0)/\sqrt{2}$] でなければならないことを示し, 角運動量が保存されていることを確認せよ。

(2) 実は, 小問(1)のような相互作用は現実には観測される光子に対しては起こらない。理由を述べよ。

[hint] 初期状態の反fermionの4元運動量が $q^{\mu} = (m, \vec{0})$, 光子吸収後の反fermionの

4元運動量が $p^{\mu} = (E, p\hat{z})$ $p \neq 0$, $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ とすると光子の不変質量は?

次に静止したfermion(質量 m)と静止した反fermion(質量 m)が対消滅して静止した光子(現実にはあり得ないが, 仮想的に質量 $2m$ の光子があったとして)が生成されたとする。

(3) ファインマン則を使って, この相互作用の振幅のスピン部分を

$$\text{fermion spinor: } u_s = N \begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{反fermion spinor: } v_s = N \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix},$$

及び 光子の偏極ベクトル: $\varepsilon^\mu = (0, \vec{\varepsilon})$

を用いて表し, 振幅が

$$-N^2(\chi_s^\dagger \vec{\sigma} \phi_s) \cdot \vec{\varepsilon}^*$$

となることを示せ (レポート問題 No.1 [4]で計算した $-\chi^\dagger \sigma_i \phi$ という量は, これである)。

[7] 難度:易～中 (フェルミオン2粒子系の波動関数)

フェルミオンの粒子の消滅演算子 $c_s(\vec{p})$ (s は, スピン状態を表すindex)は, 反交換関係

$$\{c_s(\vec{p}), c_r^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad \{c, c\} = 0$$

を持つ。また, 任意の消滅演算子に対して, 真空 $|0\rangle$ は, $c|0\rangle = 0$ を満たす。

今, フェルミオンの2粒子状態(運動量 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, スピン s, r)を

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2; s, r\rangle = \hat{c}_s^\dagger(\vec{p}_1) \hat{c}_r^\dagger(\vec{p}_2) |0\rangle$$

とする。また, 2粒子の位置固有状態を, $u_s(\vec{p})$ を運動量 $\vec{q}$, spin s を持つDirac spinorとして

$$\begin{aligned} |\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \hat{\psi}^\dagger(t, \vec{x}_1) \hat{\psi}^\dagger(t, \vec{x}_2) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \iint \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2E_2} \sum_{a,b} u_a^\dagger(\vec{q}_1) u_b^\dagger(\vec{q}_2) c_a^\dagger(\vec{q}_1) c_b^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle e^{iq_1 x_1} e^{iq_2 x_2} \end{aligned}$$

とする。

(1) 次の等式を示せ。

$$\begin{aligned} &\langle 0 | c_b(\vec{q}_2) c_a(\vec{q}_1) c_s^\dagger(\vec{p}_1) c_r^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^3 2E_1 \delta_{as} \delta(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) (2\pi)^3 2E_2 \delta_{br} \delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) \\ &\quad - (2\pi)^3 2E_1 \delta_{bs} \delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) (2\pi)^3 2E_2 \delta_{ar} \delta(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \end{aligned}$$

(2) フェルミオン2粒子の波動関数が

$$\begin{aligned} &\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, t | \vec{p}_1, \vec{p}_2; s, r \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \{ u_r(\vec{p}_2) u_s(\vec{p}_1) e^{-ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} - u_s(\vec{p}_1) u_r(\vec{p}_2) e^{-ip_2 x_1} e^{-ip_1 x_2} \} \end{aligned}$$

となることを示せ。(u_s はc数ではない。 u_s 同士の順番は勝手に入れ換えできないことに注意)

[EOF]