# 素粒子物理学
# — Neutrino Oscillation—

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2026年度春bc

武内勇司

# PMNS 行列と$\nu_\ell$の1粒子状態

Neutrino はフレーバ固有状態$(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$と質量固有状態$(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$が異なる

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Flavor固有状態　　PMNS 行列　　質量固有状態

$\ell = e, \mu, \tau$

$i = 1,2,3$

$$\nu_\ell(x) \equiv \sum_i U_{\ell i} \nu_i(x)$$　：フレーバー固有状態のニュートリノ場

$$|\nu_i(\vec{p})\rangle \equiv c_i^\dagger(\vec{p})|0\rangle$$　　$c_i^\dagger$：質量固有状態のニュートリノ $\nu_i$ の生成演算子

$$|\nu_\ell(\vec{p})\rangle = \sum_i U_{\ell i}^* c_i^\dagger(\vec{p})\,|0\rangle$$

運動量$\vec{p}$をもつフレーバ固有状態の
ニュートリノの1粒子状態

ニュートリノは弱い相互作用しかしないので，例えば $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ 崩壊のようにフレーバー固有状態として生成され，質量固有状態として飛行したのち，$\nu_\ell + n \to \ell^- + p$ のようにフレーバー固有状態として観測される。

# ニュートリノ遷移振幅

運動量 $\vec{p}$ をもつフレーバ $\ell$ の固有状態のニュートリノの1粒子状態が
位置 $x$ においてフレーバ $\ell'$ の固有状態として観測される振幅

$$\langle \nu_{\ell'}(x)|\nu_{\ell}(\vec{p})\rangle = \left\langle 0 \left| \sum_j U_{\ell' j}\nu_j(x) \sum_i U^*_{\ell i} c^\dagger_i(\vec{p}) \right| 0 \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} U_{\ell' j} U^*_{\ell i} \left\langle 0 \left| \nu_j(x) c^\dagger_i(\vec{p}) \right| 0 \right\rangle = \sum_i U_{\ell' i} U^*_{\ell i}\, e^{-ipx}$$

※ spinor 部分は略

反ニュートリノの場合，　$|\overline{\nu}_{\ell}(\vec{p})\rangle = \sum_i U_{\ell i} d^\dagger_i(\vec{p})\,|0\rangle$

$$\langle \overline{\nu}_{\ell'}(x)|\overline{\nu}_{\ell}(\vec{p})\rangle = \left\langle 0 \left| \sum_j U^*_{\ell' j}\nu^C_j(x) \sum_i U_{\ell i} d^\dagger_i(\vec{p}) \right| 0 \right\rangle = \sum_i U^*_{\ell' i} U_{\ell i}\, e^{-ipx}$$

# ニュートリノ飛行距離と位相因子

ニュートリノの質量が運動量に対して非常に小さく，ほぼ光速度で $x$ 軸方向へ運動しているとする。

$$p_\nu^\mu = (E, p, 0, 0) \qquad E \sim p \gg m \qquad x \sim t$$

振幅に入る位相因子 $e^{-ipx}$ は，

$$Et - px \sim (E - p\,)t = \left(\sqrt{p^2 + m^2} - p\,\right)t \sim \frac{m^2}{2p}t \sim \frac{m^2}{2E}x$$

と近似すると，

$$e^{-ipx} \sim \exp\left(-i\frac{m^2}{2E}x\right)$$

# ニュートリノ遷移確率

運動量 $\vec{p}$ で生成された $\nu_\ell$ が距離 $x$ 飛行して $\nu_{\ell'}$ として観測される確率

$$\langle \nu_{\ell'}(x)|\nu_\ell(\vec{p})\rangle = \sum_i U^*_{\ell i} U_{\ell' i} e^{-ipx} \sim \sum_i U^*_{\ell i} U_{\ell' i} \exp\left(-i\frac{m_i^2}{2E}x\right)$$

$$P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) = |\langle \nu_{\ell'}(x)|\nu_\ell(\vec{p})\rangle|^2$$

$$= \sum_{i,j}\left[U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j} \exp\left(-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}x\right)\right] \qquad \Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$$

$$= \delta_{\ell\ell'} - 4\sum_{i>j} \mathrm{Re}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}x\right)$$

$$+2\sum_{i>j} \mathrm{Im}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}x\right)$$

ニュートリノ振動は，質量二乗差とPMNS行列という二つの情報だけで決まる。

# ニュートリノCP

反ニュートリノの場合，第３項目の符号が変わる。

$$P(\bar{\nu}_\ell \to \bar{\nu}_{\ell'}) = \delta_{\ell\ell'} - 4\sum_{i>j} \mathrm{Re}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{ij}}{4E} x\right) \qquad \Delta m^2_{ij} \equiv m^2_i - m^2_j$$

$$-2\sum_{i>j} \mathrm{Im}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E} x\right)$$

$$P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) - P(\overline{\nu}_\ell \to \overline{\nu}_{\ell'}) = 4\sum_{i>j} \mathrm{Im}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E} x\right)$$

$$\sum_{i>j} \mathrm{Im}\left(U^*_{\ell i} U_{\ell' i} U_{\ell j} U^*_{\ell' j}\right) \sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E} x\right)$$

$$= 4J\left\{\sin\left(\frac{\Delta m^2_{12}}{4E} x\right) \sin\left(\frac{\Delta m^2_{23}}{4E} x\right) \sin\left(\frac{\Delta m^2_{31}}{4E} x\right)\right\}$$

Jarlskog invariant

$$J \equiv c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}c^2_{13}s_{13}\sin\delta_{13}$$

CPの破れの大きさを表す量

$$s_{ij} = \sin\theta_{ij} \quad c_{ij} = \cos\theta_{ij}$$

現在，$\sin\delta_{13}$ が０でないことを示す有力な示唆はあるものの，決定的とは言えない。

# ニュートリノ振動

話を簡単にするため，$\nu_e, \nu_\mu$ の2世代のみとした場合を例に考える。

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_{e1} & U_{e2}\\ U_{\mu1} & U_{\mu2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}$$

$$P(\nu_\mu \to \nu_e) = -4\left(U_{\mu2}U_{e2}U_{\mu1}U_{e1}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}x\right) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}x\right)$$

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}x \to 1.269\frac{\Delta m_{21}^2[\mathrm{eV}^2]}{4E[\mathrm{MeV}]}x[m]$$

$\Delta m_{21}^2 \sim 7.53 \times 10^{-5} e\mathrm{V}^2$

を使うと，

$$P(\nu_\mu \to \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(2.4 \times 10^{-2}\frac{x[km]}{4E[\mathrm{MeV}]}\right)$$

