素粒子物理学
— ゲージ不変性 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2026年度春bc

武内勇司

ゲージ不変性 Gauge invariance

前回見たように，Dirac場の大域的U(1)変換不変性からDirac場の電流密度，電荷に相当する量が与えられた。

今回は，U(1)に限らず，SU(2)×U(1)という枠組みで考える。

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi = \exp\left(igT^l\alpha^l\right)\Psi$$

量子数として $T = 1/2$ および Y を持つ

T^l: 回転群の生成子（Ψの持つ量子数に対応する演算子）
α^l: 回転角
g: （後で出てくるゲージ場との結合の強さを表す）定数

Ψは２成分

$$\Psi = \begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

SU(2)の場合は，$T^l = \tau^l/2$　(パウリ行列)
U(1)の場合は，$T^l = Y$　(hypercharge)

ここのYは，量子数のYではなくて演算子

$$\hat{\mathrm{Y}}\Psi = \mathrm{Y}\Psi$$

$$[T^l, T^m] = if_{lmn}T^n$$

f_{lmn} ： 群の構造定数（完全反対称）

構造定数は，U(1)にはないが，SU(2)では非可換なので出てくる：$f_{lmn} = \epsilon_{lmn}$

Dirac場の大域的ゲージ不変(global gauge invariance)

Dirac場のLagrangian: $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\Psi$ $\quad \Psi = \begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$ $\quad \bar{\Psi} = (\bar{\phi} \quad \bar{\chi})$

運動項は，SU(2)×U(1) 変換不変

※ SU(2)変換不変となるには質量項は ϕとχが共に質量mであることが必要だが，質量項は今は無視する。

大域的ゲージ変換: 回転群（生成子T）による角度αの位相空間の回転

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi = \exp(igT^l\alpha^l)\,\Psi \qquad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger = \bar{\Psi}\exp(-igT^l\alpha^l)$$

➔微小回転$\delta\alpha$の回転 $\quad \Psi' \simeq (1 + ig\,T^l\delta\alpha^l)\Psi \qquad \delta\Psi = igT^l\Psi\delta\alpha^l$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi\right\} = -g\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu T^l\Psi)\delta\alpha^l = 0$$

したがって $\quad \partial_\mu J^{l\mu} = 0 \qquad$ 但し $\quad J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l\Psi \qquad Q^l \equiv J^{l0} = \Psi^\dagger T^l\Psi$

ネーターの定理「系に連続的対称性があれば対応する保存則が存在する」

群の生成子 T ➔「電荷」の演算子

局所ゲージ不変(Local gauge invariance)

ゲージ変換を考える際，全宇宙の時空において同じ回転角を考えるのは不自然

➔回転角α_lを時空の点xの関数とする（局所ゲージ変換）

このように局所ゲージ変換に対して不変な Lagrangian とは如何なるものか？

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi = \exp\{igT^l\alpha^l(x)\}\Psi \simeq \{1 + igT^l\alpha^l(x)\}\Psi$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger = \bar{\Psi}\exp\{-igT^l\alpha^l(x)\} \simeq \bar{\Psi}\{1 - igT^l\alpha^l(x)\}$$

位相の微小変化 $\alpha^l(x)$ を考える

➔運動項には，時空の微分∂_μが入っているので$\partial_\mu\alpha^l(x)$のおつりがつく。

$$\partial_\mu\Psi' = \partial_\mu\{1 + igT^l\alpha^l(x)\}\Psi = \{1 + igT^l\alpha^l(x)\}\{\partial_\mu + igT^l(\partial_\mu\alpha^l)\}\Psi$$

したがって

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi \to \bar{\Psi}'\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^\mu\{i\partial_\mu - gT^l(\partial_\mu\alpha^l)\}\Psi$$

局所ゲージ不変：ベクトル場の導入

➔ $\mathcal{L}$ が局所ゲージ変換で不変となるために，ベクトル場A_μ^lを導入。

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}\{\gamma^\mu(i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l) - m\}\Psi = \overline{\Psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\Psi - gJ^{l\mu}A_\mu^l$$

$$J^{l\mu} \equiv \overline{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi$$

すると(微小)ゲージ変換に対して，

$$\overline{\Psi}'\{\gamma^\mu(i\partial_\mu - gT^l A'^l_\mu) - m\}\Psi' \qquad [T^l, T^m] = if_{lmn}T^n$$

$$= \overline{\Psi}[\gamma^\mu\{i\partial_\mu - gT^l(\partial_\mu\alpha^l) - g(T^l + ig[T^l, T^n]\,\alpha^n)A'^l_\mu\} - m]\,\Psi$$

$$= \overline{\Psi}[\gamma^\mu\{i\partial_\mu - gT^l(\partial_\mu\alpha^l) - g(T^l + gf_{lmn}T^m\alpha^n)A'^l_\mu\} - m]\,\Psi$$

局所ゲージ不変：ゲージ場のゲージ変換

ここでベクトル場$A^{l\mu}$は，局所ゲージ変換において

$$A_\mu^l \to A'^l_\mu = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + g f_{lmn} A_\mu^m \alpha^n$$

という変換を受けると仮定。

※ 電磁場ではゲージに不定性があり，$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \alpha$と変換しても物理現象は不変であった。

$$\mathcal{L}' = \overline{\Psi}\left[\gamma^\mu\left\{i\partial_\mu - gT^l(\partial_\mu\alpha^l) - g(T^l + gf_{lmn}T^m\alpha^n)(A_\mu^l - \partial_\mu\alpha^l + gf_{ljk}A_\mu^j\alpha^k)\right\} - m\right]\Psi$$

$$= \overline{\Psi}\{\gamma^\mu(i\partial_\mu - gT^lA_\mu^l) - m\}\Psi = \mathcal{L}$$

α^lの2次以上の項は無視

ラグランジアンをある回転群に対して局所ゲージ不変にするために，自然にベクトル場 $A^{l\mu}$ および，そのゲージ変換が導入される。
$A^{l\mu}$ をゲージ場という。

局所ゲージ不変：ゲージ場のLagrangian

ゲージ場のLagrangian は，ゲージ粒子の質量を M とすると，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M^2 A^{l\mu}A^l_\mu - \frac{1}{4}A^{l\mu\nu}A^l_{\mu\nu} - gJ^{l\mu}A^l_\mu$$

質量　　運動エネルギー　　相互作用

ゲージ場の field strength テンソル

但し $A^l_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu - g f_{lmn} A^m_\mu A^n_\nu$

$J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi$: ゲージ変換に対応する Dirac場の電流

Euler-Lagrange方程式を適用すると

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^l_\nu} - \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A^l_\nu\right)} \right\} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu A^{l\mu\nu} - g f_{lmn} A^m_\mu A^{n\mu\nu} + M^2 A^{l\nu} = g J^{l\nu}$$

U(1)ゲージの場合: $\partial_\mu A^{\mu\nu} + M^2 A^\nu = \Box A^\nu - \partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right) + M^2 A^\nu = g J^\nu$

左から ∂_ν を作用させると $M^2 \partial_\nu A^\nu = g \partial_\nu J^\nu = 0$ → $\partial_\nu A^\nu = 0$

これはベクトル場のK-G方程式　$(\Box + M^2)\, A^\nu = g J^\nu$　(Proca方程式)

局所ゲージ不変：ゲージ場のLagrangian

ゲージ場の field strength(場の強さ) テンソル

$$A^l_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu - g f_{lmn} A^m_\mu A^n_\nu$$

を定義すると，ゲージ場のゲージ変換(位相の微小変位α)に対して

$$A^l_\mu \to A'^l_\mu = A^l_\mu - \partial_\mu \alpha^l + g f_{lmn} A^m_\mu \alpha^n \quad \Rightarrow \quad A^l_{\mu\nu} \to A'^l_{\mu\nu} = A^l_{\mu\nu} + g f_{lmn} A^m_{\mu\nu} \alpha^n$$

となる。したがって $A^{l\mu\nu} A_{l\mu\nu}$ は，局所ゲージ不変。

ところが，これらのゲージ場の質量項は局所ゲージ不変にならない。

$$A'^l_\mu A'^{l\mu} = A^l_\mu A^{l\mu} - 2A^{l\mu} \partial_\mu \alpha^l \neq A^l_\mu A^{l\mu}$$

ゲージ粒子が質量を持つ局所ゲージ不変な理論は作れない！？

⇔ 実際には Weak gauge boson W/Z は質量を持つ。

ゲージ不変　まとめ

➔局所ゲージ変換で不変であるためには，ゲージ変換に対応するベクトル場A_μ^lが導入され，
微分演算子は共変微分に変更される。

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + igT^l A_\mu^l \qquad \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi \to \bar{\Psi}\gamma^\mu i\mathcal{D}_\mu \Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l\right)\Psi$$

但しこのベクトル場$A^{l\mu}$は，局所ゲージ変換において

$$A_\mu^l \to A'^l_\mu = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + g f_{lmn} A_\mu^m \alpha^n \qquad [T^l, T^m] = i f_{lmn} T^n$$

のような変換性をもつ。

局所ゲージ不変性から，回転群(生成子T^l)に対応するゲージ場A_μ^lが自然に要請され，ゲージ変換に対応したDirac場の電流との相互作用項となる。

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\Psi}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l\right)\Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi - gJ^{l\mu} A_\mu^l \qquad J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi$$

ゲージ場 $A^{l\mu}$の Lagrangian は，局所ゲージ不変な運動項を持つ。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{2} M^2 A^{l\mu} A_\mu^l - \frac{1}{4} A^{l\mu\nu} A_{\mu\nu}^l$$

但しゲージ場の質量項は局所ゲージ不変にはならない。

