素粒子物理学
— Dirac場の性質 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2026年度春bc

武内勇司

Dirac場の荷電共役変換

Klein-Gordon場の場合：　　$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qeA_\mu$

$$(i\partial_\mu i\partial^\mu - m^2)\phi = 0 \rightarrow [(i\partial_\mu - qeA_\mu)(i\partial^\mu - qeA^\mu) - m^2]\phi = 0$$

† をとると

$$[(i\partial_\mu + qeA_\mu)(i\partial^\mu + qeA^\mu) - m^2]\phi^\dagger = 0$$

電荷qが反転している。つまり $\phi^\dagger$ は反粒子を記述。

Dirac場の場合：

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0 \rightarrow [\gamma^\mu(i\partial_\mu - qeA_\mu) - m]\psi = 0$$

反粒子を記述する Dirac場を得るためには

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qeA_\mu) - m]\psi^C = 0$$

を満たす ψ^C を明らかにする必要がある。

Dirac場の荷電共役変換

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qeA_\mu) - m]\psi = 0$$

$$\psi^\dagger[\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0(-i\overleftarrow{\partial}_\mu - qeA_\mu) - m] = 0$$ ← † をとって，$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ を使う

$$[-\gamma^{\mu T}(i\partial_\mu + qeA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0$$ ← 右からγ^0 をかけて，転置

$$[-C\gamma^{\mu T}C^{-1}(i\partial_\mu + qeA_\mu) - m\,]C\bar{\psi}^T = 0$$ ←左から Cという演算子をかけ，$C^{-1}C$ を挿入

$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$ であればよい

$$C \equiv i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$ ※Dirac表示

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger$$

$$\psi^C \equiv C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$$

Dirac場の荷電共役変換

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}+qeA_{\mu}\right)-m\right]\psi^{C}=0 \qquad \psi^{C}\equiv C\bar{\psi}^{T}=i\gamma^{2}\psi^{*}$$

粒子：$\psi=u_s(\vec{p})e^{-ipx} \rightarrow \psi^{C}=u_s^{C}(\vec{p})e^{ipx}$

$$u=N\begin{pmatrix}\phi_s\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi_s\end{pmatrix} \rightarrow u^{C}=i\gamma^{2}u^{*}=N\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix} \quad \text{但し } \chi_s=-i\sigma_2\phi_s^{*}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\phi_s^{*}$$

反粒子：$\psi=v_s(\vec{p})e^{ipx} \rightarrow \psi^{C}=v_s^{C}(\vec{p})e^{-ipx}$

$$v=N\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix} \rightarrow v^{C}=i\gamma^{2}v^{*}=N\begin{pmatrix}\phi_s\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi_s\end{pmatrix} \quad \text{但し } \phi_s=i\sigma_2\chi_s^{*}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\chi_s^{*}$$

荷電共役変換では，確かに粒子・反粒子は入れ替わる。

スピンを記述する2成分spinorは粒子・反粒子で共役の関係（ $\chi_s=-i\sigma_2\phi_s^{*}$ ）

Dirac粒子の磁気能率

Dirac粒子と電磁場の相互作用ポテンシャル項：$qe\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$

spin s，質量 m, 運動量 $\vec{p}$ (非相対論的 $|\vec{p}| \ll m$)の電磁場 $A^{\mu} = (0, \vec{A})$中のポテンシャルを考える。但し $\vec{A}$ は，時間に依存しないとする。

$$\bar{\psi}_s\gamma^{\mu}\psi_s \xrightarrow{x \to p} \bar{u}_s(p')\gamma^{\mu}u_s(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}_s(p')[(2p-k)^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}]u_s(p)$$

Gordon decomposition (公式)

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p+p')^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}]u(p) \qquad k \equiv p' - p \qquad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$$

k は，入射光子の運動量。運動量表示から座標表示に戻すと $k_{\nu} \to i\partial_{\nu}$

※ 光子の場A_{μ}に対する演算子

$$qe\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \to \frac{1}{2m}\bar{u}_s[(2p - i\partial)^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}i\partial_{\nu}]u_s A_{\mu}$$

$$= qe\frac{1}{m}\bar{u}_s u_s p^{\mu}A_{\mu} - qe\frac{1}{2m}\bar{u}_s\sigma^{\mu\nu}u_s\partial_{\nu}A_{\mu} \qquad (\partial^{\mu}A_{\mu} = 0 \text{ を使った})$$

Dirac粒子の磁気能率

$p \ll m \sim E$ (非相対論的)という条件で

$$qe\frac{1}{m}\bar{u}_s u_s p^\mu A_\mu - qe\frac{1}{2m}\bar{u}_s \sigma^{\mu\nu} u_s \partial_\nu A_\mu \;\rightarrow\; -qe\vec{v}\cdot\vec{A} - \frac{qe}{m}\vec{s}\cdot\vec{B} \qquad u_s \sim N\begin{pmatrix}\phi_s\\0\end{pmatrix}$$

但し今はDirac粒子１個についての議論なので，$u_s^\dagger u_s = 1$ とする。
また　$\frac{1}{2}\phi_s^\dagger \vec{\sigma}\phi_s \equiv \vec{s}$　は，粒子のスピンvector (大きさ１/2)。

第1項はローレンツ力$(-qe\vec{v}\cdot\vec{A})$，第２項は磁気能率のポテンシャル $(-\vec{\mu}\cdot\vec{B})$

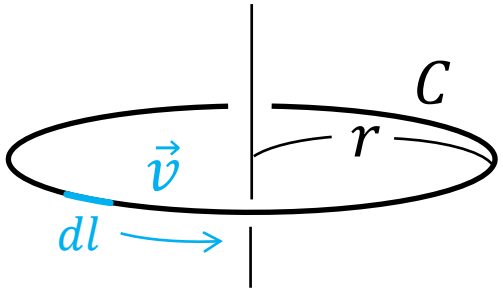
Dirac 粒子の磁気能率は，$\vec{s}$ を粒子のスピンとすると

$$\vec{\mu} = \frac{qe}{m}\vec{s} \equiv g\frac{qm_e}{m}\mu_B\vec{s} \qquad g = 2 \qquad \mu_B \equiv \frac{e}{2m_e}$$

gはg-因子，　μ_Bはボーア磁子(Bohr magneton)と呼ばれる量

Dirac粒子のg因子: $g = 2$

もし，粒子の磁気能率とスピンが電荷qeと質量mの空間的大きさをもつ物体の自転に由来していると仮定すると，



$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int_C \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) dl \qquad \vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{qe}{2\pi r}\vec{v}$$

電流が作る magnetic moment

但し C は，半径 r の円周。

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int_C \vec{x} \times \frac{qe}{2\pi r}\vec{v} dl = \frac{qe}{2m}\int_C \vec{x} \times \frac{m}{2\pi r}\vec{v} dl = \frac{qe}{2m}\vec{L} = \frac{qm_e}{m}\mu_B\vec{L} \qquad \left(\mu_B \equiv \frac{e}{2m_e}\right)$$

$\vec{L}$：大きさを持つ粒子の自転よる角運動量

この場合 $g = 1$ である。

つまり，Dirac粒子の磁気能率は，電荷を持つ粒子が自転して発生しているという説明は成り立たない。
$g = 2$ は，Dirac粒子が持っている本来の性質である。

空間反転対称性(Parity) とDirac粒子

Parity 変換：空間座標(x, y, z)の反転 $\vec{x} \to -\vec{x}$

$$\vec{x} = (x, y, z) \xrightarrow{P} \vec{x}' = -\vec{x} = (-x, -y, -z) \xrightarrow{R_y(180^\circ)} \vec{x}'' = (x, -y, z)$$

$y = 0$ (zx平面)を鏡面とする「鏡像変換」と等価

$$x^\mu = (x_0, \vec{x}) \xrightarrow{P} x'^\mu = (x_0, -\vec{x}) = x_\mu$$

Dirac場のParity (空間反転対称性)

方程式がParity変換に対して不変であるとき，spinor は，どう変換されるか？

$$\psi \xrightarrow{P} \psi' = P\psi$$

$$\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)\psi = 0 \xrightarrow{P} (\gamma^\mu i\partial^\mu - m)P\psi = 0$$

左からP^{-1} をかける → $P^{-1}(\gamma^\mu i\partial^\mu - m)P\psi = (P^{-1}\gamma^\mu P\, i\partial^\mu - m)\psi = 0$

よって，$P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0$, $P^{-1}\gamma^i P = -\gamma^i$ を満たす。また，定義から $P^2 = 1$

Dirac粒子のParity

γ 行列の性質： $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$, $(\gamma^0)^2 = 1$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ を使うと,

$$P = \eta_P\gamma^0 = \eta_P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \eta_P^2 = 1 \qquad P^{-1} = \eta_P\gamma^0$$

となることが分かる。

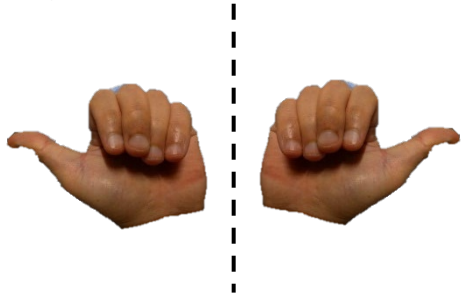
$$Pu_s(\vec{p}) = \eta_P u_s(-\vec{p}) \qquad Pv_s(\vec{p}) = -\eta_P v_s(-\vec{p}) \qquad \eta_P \equiv 1$$

Dirac粒子は，粒子と反粒子で Parity は逆。
η_Pは決まらない ➔ 粒子は $P = 1$ (反粒子は，$P = -1$)と定義。

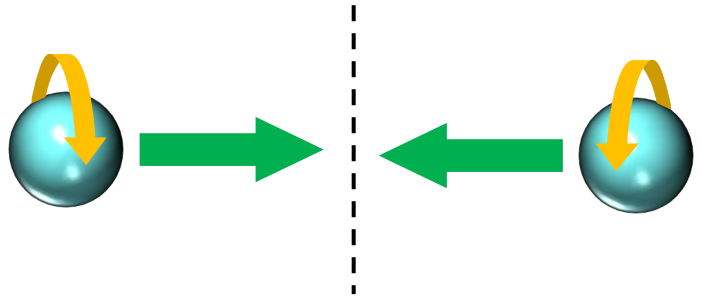
P変換でスピンは反転しないが，運動量は反転する。
スピンを持つ粒子が静止($\vec{p} = 0$)している場合は，P固有状態が定義可能。
質量がある場合は静止系へ移行できるが，massless Dirac粒子にはP固有状態は存在しない（カイラルである）。

Dirac粒子のカイラリティ(chirality, 掌性)

鏡像（P変換）が元と一致しない ＝ chiral ⇔ achiral
massless Dirac 粒子は，chiralである。例えば運動方向に対して spin＋を右chirality, spinーを左chirality と定義可能。



質量のある粒子は，慣性系によっては運動方向が反転
➔決まった chirality 状態にない。
➔両方のchirality成分が混ざった状態： $\psi = \psi_L + \psi_R$



鏡像変換で運動方向は反転
スピン方向は不変

Chirality 射影演算子 P_L， P_R : $\psi_R \equiv P_R\psi \quad \psi_L \equiv P_L\psi$

$$P_L + P_R = 1$$

$$P_L^2 = P_L \qquad P_R^2 = P_R \qquad P_L P_R = P_R P_L = 0$$

$$P^{-1}P_{L,R}P = P_{R,L}$$ (右chirality射影 $\overset{P}{\Longleftrightarrow}$ 左chirality射影)

Dirac粒子のchirality演算子

Chirality 演算子：$\Gamma \equiv P_R - P_L$　[R(L) chirality 状態なら固有値 1(-1)]

$P^{-1}\Gamma P = -\Gamma$　　$\Gamma^2 = (P_R - P_L)^2 = P_R + P_L = 1$

これを満たす Γ は

$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　Dirac表示　　$(\gamma^5)^2 = 1$

$\{\gamma^5, P\} = \{\gamma^5, \gamma^0\} = 0$　　γ^5 は，パリティ変換で符号が反転

Chirality 射影演算子(Dirac表示)：

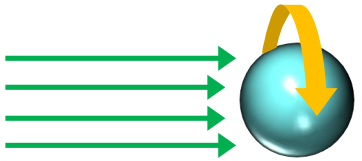
$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dirac粒子のchiralityとhelicity

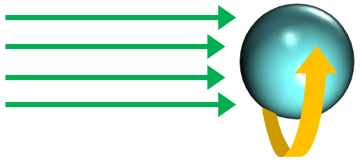
$\vec{p} = (0,0,p) \quad (p > 0)$　　粒子の場合の Dirac spinor $\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix} \xrightarrow{m\to 0} \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma_3\phi \end{pmatrix}$

Helicity：粒子(反粒子)の運動方向の spin成分

$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: helicity ＋



$\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: helicity －



に対して　$\sigma_3\phi_\pm = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\phi_\pm = \pm\phi_\pm$

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \phi_\pm \\ \sigma_3\phi_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_\pm \\ \sigma_3\phi_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\phi_\pm \\ \phi_\pm \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \phi_\pm \\ \sigma_3\phi_\pm \end{pmatrix}$$

massless 粒子において，
　helicity ＋ ⇔ chirality R
　helicity － ⇔ chirality L

massless 反粒子の場合，
　helicity － ⇔ chirality R
　helicity ＋ ⇔ chirality L

massless粒子は，helicity と chirality 一致するが，反粒子では逆になる。

Dirac粒子のカイラリティ(chirality, 掌性)

z方向へのβ,γの
Lorentz boost

$$S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sigma_3\dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} \\ \sigma_3\dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Dirac spinor の
Lorentz変換
$\psi \to \psi' = S\psi$

$S^{-1}\gamma^5 S = \gamma^5$　　すなわち，　　$S\psi_{L,R} = SP_{L,R}\psi = P_{L,R}S\psi$　　$P_{L,R}$ は，S と可換

R(L)カイラリティ状態は，どの慣性系から見ても同じカイラリティ状態。但し大きさはR/Lで別々に変わるので，massive粒子ではRとLの割合はスピン方向と慣性系に依存し変化。

例えばz方向へboostされた系の spinor：　$u = S\begin{pmatrix}\phi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi \\ \alpha\sigma_3\phi\end{pmatrix}$　　$\alpha \equiv \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1}$

$$P_L u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-\alpha\sigma_3)\phi \\ -(1-\alpha\sigma_3)\phi\end{pmatrix} \qquad P_R u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1+\alpha\sigma_3)\phi \\ (1+\alpha\sigma_3)\phi\end{pmatrix}$$

カイラリティとは，helicityの概念を粒子・反粒子を考慮し，且つ相対論的に拡張したものとも言える。

ベルトル型相互作用でのカイラリティ保存

Lagrangian の質量項 $m\bar{\psi}\psi$, 運動エネルギー項 $\bar{\psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\psi$

$$\psi = \psi_L + \psi_R \qquad \psi_L = P_L\psi \qquad \psi_R = P_R\psi$$

$$\bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 P_R = \bar{\psi}P_R \qquad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_L$$

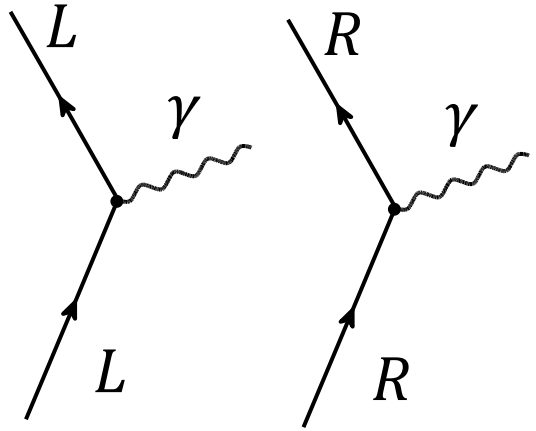
$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$$

質量があると L/R chirality の結合がある(L/Rが混合する).

$$\gamma^\mu P_R = P_L\gamma^\mu \qquad \gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

運動量項やベクトル型の相互作用項は L/R chirality を変えない.



相対論的に運動する粒子(masslessで近似できる)では，電磁相互作用などのベクトル型の相互作用において「helicity は保存する」

Dirac spinor の双一次形式(Bilinear form)

Dirac場の相互作用項の一般形 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ （Γは4x4行列)は，独立な量が16個

γ^μ のべき乗順で以下のように分類。

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Γ	1	γ^μ	$\sigma^{\mu\nu}$ $(\gamma^\mu\gamma^\nu)$	$\gamma^\mu\gamma^5$ $(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)$	γ^5 $(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)$
独立要素数	1	4	6	4	1
双一次形式	$\bar{\psi}\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$
Lorentz 変換性	Scalar	Vector	Tensor	Axial vector	Pseudo-scalar

軸性ベクトル
Parity変換でγ^5が符号を変える

偽スカラー

Dirac場の性質 まとめ

Dirac場の荷電共役　$\psi^C \equiv C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$　$C \equiv i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$　※Dirac表示

$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$　$C = C^* = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger$

Dirac粒子の磁気能率　$qe\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \xrightarrow{|p|\ll m} -qe\vec{v}\cdot\vec{A} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}$　但し $A^\mu = (0, \vec{A})$

$\vec{\mu} = g\dfrac{qm_e}{m}\mu_B\vec{s}$　$g = 2$　$\vec{s}$ は，Dirac粒子のスピン　$\mu_B \equiv \dfrac{e}{2m_e}$

Dirac場のParity 変換　$P = \gamma^0$　$P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0$　$P^{-1}\gamma^i P = -\gamma^i$　$P^2 = 1$

$Pu_s(\vec{p}) = u_s(-\vec{p})$　$Pv_s(\vec{p}) = -v_s(-\vec{p})$

Dirac場のカイラリティ　Chirality 演算子：$\Gamma \equiv P_R - P_L = \gamma^5$

Chirality 射影演算子 P_L，P_R：$\psi_R \equiv P_R\psi$　$\psi_L \equiv P_L\psi$

$P_L + P_R = 1$　$P_L^2 = P_L$　$P_R^2 = P_R$　$P_L P_R = P_R P_L = 0$　$P^{-1}P_{L,R}P = P_{R,L}$

$P_L = \dfrac{1-\gamma^5}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　$P_R = \dfrac{1+\gamma^5}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$